Catatan Kuis 3 dan UAS

Aljabar Linear dan Geometri

Naufarrel Zhafif Abhista

Contents

Chapter 1

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

1.1 Definisi

Definisi 1.1: Vektor Eigen

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka **vektor tidak-nol** x **di** R^n disebut vektor eigen dari A jika Ax sama dengan perkalian suatu skalar λ dengan x. Dapat dituliskan,

$$Ax = \lambda x$$

λ adalah nilai eigen dari A, dan x adalah vektor eigen yang berkoresponden dengan λ.

- Nilai eigen menyatakan nilai karakteristik dari sebuah matriks yang berukuran $n \times n$.
- Vektor eigen x menyatakan sebuah matriks kolom. Apabila dikalikan dengan sebuah matriks $n \times n$, hasilnya adalah vektor lain yang merupakan kelipatan x.
- Karena λ berkoresponden dengan A, dapat disimpulkan bahwa operasi $Ax = \lambda x$ menyebabkan x memanjang atau menyusut sesuai faktor λ, dengan arah sesuai tanda λ.

1.2 Penghitungan Eigen

Mari kita turunkan penghitungannya.

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ IAx &= \lambda Ix \\ Ax &= \lambda Ix \\ (\lambda I - A)x &= 0 \end{aligned}$$

Solusi trivial dari persamaan ini, didapat saat $x = 0$. Agar memiliki solusi tidak 0, maka haruslah:

$$det(\lambda I - A) = 0$$

Persamaan ini disebut persamaan karakteristik dari A yang memiliki nilai-nilai eigen λ.

Teorema 1.1: Persamaan Karakteristik

Dari persamaan $(\lambda I - A)x = 0$, kita peroleh:

$$det(\lambda I - A) = 0$$

Solusi λ yang diperoleh adalah nilai-nilai eigen yang dicari.

Contoh 1.1

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Jawab:

(a) Menentukan nilai eigen (Mencari λ)

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

Hitunglah $det(\lambda I - A)$,

$$det(\lambda I - A) = 0 \implies \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \implies (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \implies \lambda_1 = 3 \vee \lambda_2 = -1$$

(b) Menentukan vektor eigen (Mencari x)

$$(\lambda I - A)x = 0$$
$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Untuk $\lambda = 3$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \implies x_1 = \frac{1}{2}t,\ x_2 = t,\ t \in \mathbb{R}$$

Sehingga diperoleh vektor eigen x,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dapat disimpulkan $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen ketika $\lambda = 3$. Tuliskan ruang eigen dengan notasi $E(3) = \left\{ x = t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

Untuk $\lambda = -1$,

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \implies x_1 = 0,\ x_2 = t,\ t \in \mathbb{R}$$

Sehingga diperoleh vektor eigen x,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dapat disimpulkan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang eigen ketika $\lambda = -1$. Tuliskan ruang eigen dengan notasi $E(-1) = \left\{ x = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

Terdapat matriks yang mungkin saja tidak memiliki nilai eigen! Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.2: Matriks Tanpa Nilai Eigen

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab:

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

Hitunglah $det(\lambda I - A)$,

$$det(\lambda I - A) = 0 \implies \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \implies (\lambda - 2)(\lambda + 2) - (-5)(1) = 0$$

$$\implies \lambda^2 + 1 = 0$$

Akar imajiner! Solusi tidak dapat diperoleh.

1.3 Matriks Balikan

Teorema 1.2: Nilai Eigen dan Matriks Balikan

Sebuah matriks persegi A berukuran $n \times n$ memiliki balikan (invers) jika dan hanya jika $\lambda = 0$ bukan nilai eigen dari A.

Jika A memiliki balikan, maka $det(A) \neq 0$

1.4 Diagonalisasi

Definisi 1.2: Matriks Diagonal dan Diagonalisasi

- Matriks diagonal adalah matriks yang memiliki nilai 0 di semua tempat selain diagonal utama.
- Sebuah matriks persegi A dikatakan dapat didiagonalisasi jika ia mirip dengan matriks diagonal, yaitu terdapat matriks P sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal. Dalam hal ini, dikatakan P mendiagonalisasi matriks A. Misalkan D adalah hasil diagonalisasi A, maka,
$$D = P^{-1}AP$$
- P adalah matriks yang kolom-kolomnya merupakan basis ruang eigen dari matriks A.

Matriks diagonalisasi D memiliki kemiripan dengan matriks awal A. Kemiripan tersebut, terdiri atas:

- $det(D) = det(A)$
- $rank(D) = rank(A)$
- $nullity(D) = nullity(A)$
- Persamaan karakteristik yang sama.
- Nilai eigen (λ) dan dimensi ruang eigen yang sama.

Contoh 1.3

Tentukan matriks P yang mendiagonalisasi $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$!

Jawab: Tentukan basis ruang eigennya.

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -3 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

Hitung determinannya, $det(\lambda I - A) = 0 \implies (\lambda - 1)^2 - (-3)^2 = 0 \implies \lambda_1 = 4 \vee \lambda_2 = -2$.
Tentukan vektor eigennya. Untuk $\lambda_1 = 4$,

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \implies x = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda_2 = -2$,

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \implies x = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks diagonalisasinya adalah

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \implies P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Salah satu kegunaan diagonalisasi adalah mempermudah perpangkatan matriks.
- Misalnya, kita ingin menghitung nilai dari A^3.

$$\begin{aligned} A^3 &= (PDP^{-1})^3 \\ &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PDIDIDP^{-1} \\ &= PD^3P^{-1} \end{aligned}$$

- Karena D adalah matriks diagonal, penghitungan D^3 lebih mudah. Misalkan $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$,

$$D^3 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix}$$

- Perhitungan perpangkatan dapat dilanjutkan dengan $A^3 = PD^3P^{-1}$.

1.5 Aplikasi Nilai dan Vektor Eigen

1.5.1 *Analytic Hierarchy Process (AHP)*

- Merupakan metode analisis dalam pengambilan keputusan.
- Lebih jelasnya, AHP adalah metode menurunkan skala rasio dari perbandingan antar kriteria.
- Skala rasio memakai prinsip Nilai Eigen; indeks inkonsistensi memakai prinsip Vektor Eigen.
- Adapun tahapannya, dijelaskan melalui contoh 1.4.

Contoh 1.4: Penggunaan AHP

Ada tiga buah (Apel, Belimbing, dan Ceri) yang akan Joko pilih untuk dibawa satu. Buah manakah yang akan dibawa?
Jawab:

1. *Pairwise Comparison*: Tahapan membandingkan dua benda dari kumpulan benda yang ada. Untuk setiap n benda, akan ada $\frac{n(n-1)}{2}$.
   Pada contoh disini, Joko mengatur prioritasnya sebagai berikut.

					V			
Apel 9	7	5	3	1	3	5	7	9 Belimbing

		V						
Apel 9	7	5	3	1	3	5	7	9 Ceri

	V							
Belimbing 9	7	5	3	1	3	5	7	9 Ceri

2. Pembentukan Matriks Perbandingan: Terdapat dua aturan.
   (a) Jika nilai di kiri angka 1, masukkan angka aktual.
   (b) Jika nilai di kanan angka 1, masukkan balikannya.

Buah	Apel	Belimbing	Ceri
Apel	1	$\frac{1}{3}$	5
Belimbing	3	1	7
Ceri	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	1

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

3. Tentukan vektor prioritas: Hitunglah nilai eigen dan vektor eigennya. Ditemukan $\lambda_m ax = 3.0649$. Kemudian, didapat $x = \begin{bmatrix} 3.87828 \\ 9.02462 \\ 1 \end{bmatrix}$. Normalisasi x memberikan $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0.2790 \\ 0.6491 \\ 0.0719 \end{bmatrix}$, sehingga yang akan dipilih adalah buah dengan persentase 64.91%, yakni Belimbing.

1.5.2 *Facial Regocnition*

- *Eigenface* adalah metode pengenalan wajah *(face recognition)* di berbasis vektor eigen dan nilai eigen yang digunakan untuk persoalan-persoalan di dalam computer vision.
- Dikembangkan oleh Sirovich and Kirby dan digunakan oleh Matthew Turk dan Alex Pentland untuk klasifikasi wajah.
- Vektor eigen diturunkan dari matriks kovarian dari sejumlah citra wajah latih (*training image*).
- *Eigenface* membentuk himpunan basis dari semua gambar yang digunakan untuk membangun matriks kovarian. Ini menghasilkan pengurangan dimensi dengan memungkinkan kumpulan gambar dasar yang lebih kecil untuk mewakili gambar pelatihan asli. Klasifikasi dapat dicapai dengan membandingkan bagaimana wajah direpresentasikan oleh himpunan basis.
- Gagasannya adalah bahwa setiap wajah manusia dalam kelompok ras adalah kombinasi dari beberapa lusin bentuk primer.

Chapter 2

Singular Value Decomposition (SVD)

2.1 Dekomposisi Matriks

- Artinya adalah pemfaktoran matriks.
- Misalnya A adalah matriks, maka A dapat disusun dari perkalian matriks, sedemikian sehingga,
$$A = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$$
- Ada beberapa metode dekomposisi matriks,
    1. Metode Dekomposisi LU (*Lower-Upper*)
    2. Metode Dekomposisi QR (*Orthogonal-Upper*)
    3. Metode SVD (*Singular Value Decomposition*)
- Pada bab ini akan dibahas SVD secara lebih dalam.

2.2 SVD

- Telah kita pelajari bahwasannya untuk suatu matriks $n \times n$, katakanlah A, dapat didekomposisi menjadi $A = PDP^{-1}$. Metode tersebut hanya berlaku untuk suatu matriks persegi. Untuk matriks non-persegi, kita gunakan SVD.

Definisi 2.1: *Singular Value Decomposition* (SVD)

Singular Value Decomposition (SVD) adalah metode dekomposisi suatu matriks $m \times n$ menjadi tiga matriks, yakni matriks U, Σ, dan V, sedemikian sehingga,
$$A = U\Sigma V^T$$

di mana U adalah matriks ortogonal $m \times m$, V adalah matriks ortogonal $n \times n$, dan Σ adalah matriks dengan diagonal utama berelemen nilai singular A, sedangkan sisanya 0.

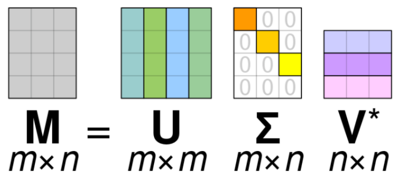

Figure 2.1: Ilustrasi SVD

2.2.1 Matriks Ortogonal

- Disebutkan bahwa U dan V adalah matriks ortogonal.
- Matriks ortogonal adalah matriks yang kolomnya terdiri dari vektor ortogonal. Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Bila terdiri dari vektor ortonormal, maka disebut matriks ortonormal. Matriks di atas juga merupakan contoh vektor ortonormal.
- Untuk vektor ortogonal Q berukuran $n \times n$, berlaku,

$$Q^T Q = QQ^T = I$$

  di mana I adalah matriks identitas berukuran $n \times n$.

2.2.2 Diagonal Utama Matriks Non-Persegi

Untuk matriks non-persegi berukuran $m \times n$, diagonal utama matriks didefinisikan dengan garis yang ditarik dari elemen kiri atas (0,0) ke kanan bawah secara diagonal, sejauh mungkin.

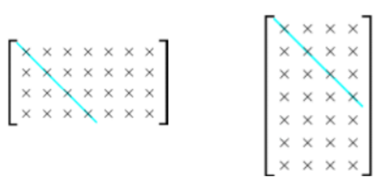

Figure 2.2: Gambaran diagonal matriks $m \times n$.

2.2.3 Nilai Singular Matriks

Definisi 2.2: Nilai Singular Matriks

Misalkan A adalah matriks $m \times n$. Jika $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari A, maka,

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sigma_n = \sqrt{\lambda_n},$$

adalah nilai singular dari A.

Teorema 2.1

Misalkan A adalah matriks $m \times n$. Maka,

- $A^T A$ bisa didiagonalkan secara ortogonal.
- Nilai eigen $A^T A$ nonnegatif.

2.3 Dekomposisi dan Penghitungan SVD

Teorema 2.2: SVD (Lanjutan)

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka A dapat didekomposisi menjadi,

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_k & | & u_{k+1} & \cdots & u_m \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0_{k\times(n-k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_k & 0_{(m-k)\times(n-k)} \\ & 0_{(m-k)\times k} & & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_k^T \\ v_{k+1}^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

dengan:

- m adalah jumlah baris A, n adalah jumlah kolom A, dan $k = \text{rank}(A)$, yakni nilai eigen $A^T A$ yang positif.
- Σ adalah matriks diagonal $m \times n$ berelemen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$.
- $u_1, u_2, \cdots, u_k$ adalah **vektor singular kiri** dari A.
- $v_1, v_2, \cdots, v_k$ adalah **vektor singular kanan** dari A.
- V adalah matriks ortonormal berukuran $n \times n$ yang secara ortogonal mendiagonalisasi A.
- Kolom vektor V disusun sehingga $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0$ (Nilai σ-nya terurut menurun, sehingga vektor yang berkoresponden ikut diurutkan menurun).

- U adalah matriks ortonormal berukuran $m \times m$.
- $u_1, u_2, \cdots, u_k$ adalah basis ortonormal untuk col(A).
- $u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots, u_m$ adalah ekstensi untuk basis ortonormal di R^m. Artinya, ekstensi ini diperoleh dari hasil kali silang u lainnya.
- u_i diperoleh dengan $u_i = \frac{Av_i}{\|Av_i\|} = \frac{1}{\sigma_i}Av_i$, dengan $i = 1, 2, \cdots, k$.

Terdapat dua cara yang dapat digunakan untuk menggunakan dekomposisi SVD.

1. Menggunakan teorema 2.2 di atas, atau
2. Menghitung vektor singular kanan dan kiri secara terpisah.

2.3.1 Cara 1

1. Buatlah matriks A^TA, lalu cari nilai dan vektor eigennya. Vektor eigen yang terbentuk adalah cikal bakal vektor v_i.
2. Normalkan (bagi dengan panjangnya) setiap vektor eigen yang ditemukan.
3. Gabungkan semua $\hat{v}$ menjadi matriks V, terurut menurun menurut nilai eigennya. Transposekan matriksnya, maka terbentuk matriks V^T
4. Akarkan nilai eigen yang telah diperoleh, maka diperoleh σ_i. Gabungkan secara diagonal, diperoleh Σ.
5. Tentukan singular kiri dengan persamaan,
$$u_i = \frac{Av_i}{\|Av_i\|} = \frac{1}{\sigma_i}Av_i$$
Jika $n > k$, perluas U dengan membentuk basis ortonormal untuk R^m (Simpelnya, buat SPL lagi dari vektor u yang udah ada, dibuat sama dengan 0)(Lebih jelasnya, dicontohkan).
6. Normalisasi vektor u_i yang diperoleh dan gabungkan hasil normalisasinya.
7. Terbentuklah $A = U\Sigma V^T$

Contoh 2.1: Cara 1, Contoh 1

Faktorkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ dengan metode SVD dengan Cara 1!

Jawab:

1. Kita buat matriks $A^T A$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\implies det(\lambda I - AA^T) = \begin{vmatrix} \lambda - 10 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 10 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies \lambda(\lambda - 12)(\lambda - 10) = 0 \implies \lambda_1 = 12 \vee \lambda_2 = 10 \vee \lambda_3 = 0$$

Untuk setiap λ yang ditemukan, carilah vektor eigennya.

- Untuk $\lambda_1 = 12$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \implies v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Untuk $\lambda_2 = 10$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Untuk $\lambda_3 = 0$:

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & -2 \\ 0 & -10 & -4 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{bmatrix} \implies v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

2. Normalkan vektor v_i.

- Untuk v_1:

$$\hat{v_1} = \frac{(1, 2, 1)}{\sqrt{6}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

- Untuk v_2:

$$\hat{v_2} = \frac{(2, -1, 0)}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Untuk v_3:

$$\hat{v_3} = \frac{(1, 2, -5)}{\sqrt{30}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

3. Sehingga,

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \iff V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

4. Telah kita peroleh $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 10$, atau $\lambda_3 = 0$. Kita ambil λ positif dan akarkan, maka didapat $\sigma_1 = \sqrt{12} \vee \sigma_2 = \sqrt{10}$. Sehingga, matriks Σ berukuran $m \times n$-nya akan berbentuk,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$$

5. Karena hanya ada dua σ, kita cukup mencari dua vektor u.

   - Untuk $\sigma = \sqrt{12}$,

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \implies u_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

   - Untuk $\sigma = \sqrt{10}$,

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies u_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{2} \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$$

6. Hasil normalisasi vektor masing-masingnya,

   - Untuk u_1:

$$\hat{u_1} = \frac{(\sqrt{3}, \sqrt{3})}{\sqrt{6}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

   - Untuk u_2:

$$\hat{u_2} = \frac{(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2})}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

   Hasil penggabungannya adalah,

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

7. Hasil akhir dekomposisi SVD-nya adalah,

$$A = U\Sigma V^T \implies \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2: Cara 1, Contoh 2

Faktorkan $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ dengan metode SVD dengan Cara 1!

Jawab:

1. Kita buat matriks $A^T A$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 24 \\ 24 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\implies det(\lambda I - A^T A) = \begin{vmatrix} \lambda - 52 & -24 \\ -24 & \lambda - 16 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies \lambda(\lambda - 64)(\lambda - 4) = 0 \implies \lambda_1 = 64 \vee \lambda_2 = 4$$

   Untuk setiap λ yang ditemukan, carilah vektor eigennya.

   - Untuk $\lambda_1 = 64$:

$$\begin{bmatrix} 12 & -24 \\ -24 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \implies v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   - Untuk $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{bmatrix} -48 & -24 \\ -24 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \implies v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Normalkan vektor v_i.

   - Untuk v_1:

$$\hat{v_1} = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

   - Untuk v_2:

$$\hat{v_2} = \frac{(-1,2)}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

3. Sehingga,

$$V = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \iff V^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

4. Telah kita peroleh $\lambda_1 = 64$ atau $\lambda_2 = 4$. Kita ambil λ positif dan akarkan, maka didapat $\sigma_1 = 8 \vee \sigma_2 = 2$. Sehingga, matriks Σ berukuran $m \times n$-nya akan berbentuk,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Cari vektor u.
   - Untuk $\sigma = 8$,
   $$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \implies u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   - Untuk $\sigma = 2$,
   $$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \implies u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$
   - Karena matriks U berukuran 3×3, diperlukan satu buah vektor lagi. Satu vektor ini dapat dicari dengan memperluas basis ke $\mathbb{R}^3$. Perhatikan bahwa,
   $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$
   akan menghasilkan x. Nilai x adalah ekstensi basis yang kita cari, atau dapat dikatakan sebagai cikal bakal v_3 kita. Selesaikan,
   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{(Lanjutkan OBE-nya)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
   Ditemukan $x_1 = 0, x_2 = t$, dan $x_3 = 0$. Maka,
   $$x = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. Hasil normalisasi vektor masing-masingnya,
   - Untuk u_1:
   $$\hat{u_1} = \frac{(2,0,1)}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$
   - Untuk u_2:
   $$\hat{u_2} = \frac{(1,0,-2)}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$
   - Untuk u_3: Sudah normal.

   Hasil penggabungannya adalah,
   $$U = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$$

7. Hasil akhir dekomposisi SVD-nya adalah,

$$A = U\Sigma V^T \implies \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

2.3.2 Cara 2

1. Ulangi cara 1 pada langkah 1 hingga 4.
2. Buatlah matriks AA^T, lalu cari nilai dan vektor eigennya. Vektor eigen yang terbentuk adalah cikal bakal vektor u_i.
3. Normalkan (bagi dengan panjangnya) setiap vektor eigen yang ditemukan.
4. Gabungkan semua $\hat{u}$ menjadi matriks U, terurut menurun menurut nilai eigennya.
5. Terbentuklah $A = U\Sigma V^T$.

Contoh 2.3: Cara 2, Contoh 1

Faktorkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ dengan metode SVD dengan Cara 2!

Jawab:

1. Berdasarkan cara 1, didapat

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \iff V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

dan juga,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$$

2. Kita buat matriks AA^T

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\implies det(\lambda I - A^T A) = \begin{vmatrix} \lambda - 11 & -1 \\ -1 & \lambda - 11 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies \lambda(\lambda - 10)(\lambda - 12) = 0 \implies \lambda_1 = 12 \vee \lambda_2 = 10$$

Untuk setiap λ yang ditemukan, carilah vektor eigennya.

- Untuk $\lambda_1 = 12$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Untuk $\lambda_2 = 10$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. Normalkan vektor eigen

$$\hat{u_1} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\hat{u_2} = \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

4. Gabungkan, sehingga,

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

5. Hasil akhir dekomposisi SVD-nya adalah,

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

Hasilnya sama dengan cara 1.

Contoh 2.4: Cara 2, Contoh 2

Faktorkan $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ dengan metode SVD dengan Cara 2!

Jawab:

1. Berdasarkan cara 1, didapat

$$V = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \iff V^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

dan juga,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Kita buat matriks AA^T

$$AA^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\implies det(\lambda I - AA^T) = \begin{vmatrix} \lambda - 52 & 0 & -24 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -24 & 0 & \lambda - 16 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies (\lambda - 52)(\lambda - 16) - (-24)^2 = 0$$

$$\implies (\lambda - 64)(\lambda - 4) = 0$$

$$\implies \lambda_1 = 64 \vee \lambda_2 = 4$$

Untuk setiap λ yang ditemukan, carilah vektor eigennya.

- Untuk $\lambda_1 = 64$:

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & -24 \\ 0 & 64 & 0 \\ -24 & 0 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Untuk $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{bmatrix} -48 & 0 & -24 \\ 0 & 4 & 0 \\ -24 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- Untuk $\lambda_3 = 0$:

$$\begin{bmatrix} -52 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \\ -24 & 0 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Normalkan vektor eigen

$$\hat{u_1} = \frac{(2, 0, -1)}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\hat{u_2} = \frac{(1, 0, 2)}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\hat{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Gabungkan, sehingga,

$$U = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$$

5. Hasil akhir dekomposisi SVD-nya adalah,

$$A = U\Sigma V^T \implies \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Hasilnya sama dengan cara 1.

2.4 SVD Tereduksi

Definisi 2.3: SVD Tereduksi

Baris dan kolom yang seluruhnya bernilai 0 pada matriks Σ dapat dihilangkan, sehingga menjadi,

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_k^T \end{bmatrix}$$

Bentuk ini disebut **SVD Tereduksi**. Kita dapat menuliskan A dalam bentuk tereduksi, yakni,

$$A = U_1\Sigma_1 V_1^T$$

dengan U_1 berukuran $m \times k$, Σ_1 berukuran $k \times k$, dan V_1^T berukuran $k \times n$. Matriks Σ_1 sekarang memiliki balikan, karena ia berbentuk persegi dan elemen diagonalnya pasti positif. (Ingat kembali, k adalah $rank(A)$)

- Pengalian bentuk di atas akan menghasilkan,

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$$

  Bentuk ini dinamakan **bentuk ekspansi SVD** dari A.

- Matriks $M = uv^T$ akan selalu memiliki $rank(M) = 1$, sehingga ekspansi yang dihasilkan pasti dibentuk dari kombinasi linear k buah matriks yang memiliki rank 1.

Contoh 2.5: Reduksi dan Ekspansi SVD

Tentukan bentuk SVD tereduksi dari $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, serta bentuklah ekspansi yang sesuai!

Jawab:

1. Sudah ditunjukkan bahwa,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

   Karena $rank(A) = 2$, bentuk SVD tereduksi dari A adalah,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

2. Bentuk ekspansi SVD yang sesuai adalah,

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T = 8 \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = 8 \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

2.5 Aplikasi SVD

1. Pengolahan Citra
2. *Machine Learning*
3. *Computer Vision*
4. *Digital Watermarking*

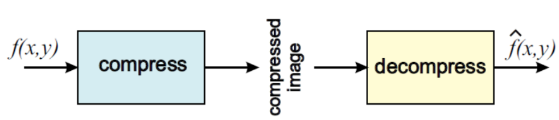

Figure 2.3: Ilustrasi Pengolahan Citra

Chapter 3

Dekomposisi LU (*Lower Upper*)

Definisi 3.1: Dekomposisi LU

Jika matriks A persegi non-singular, maka ia dapat difaktorkan (di-dekomposisi) menjadi matriks segitiga bawah L (lower) dan matriks segitiga atas U (upper):

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Terdapat dua metode dalam memfaktorkan matriks menggunakan metode LU:

1. Metode LU-Gauss
2. Metode Reduksi Crout

3.1 Metode LU-Gauss

Misalkan matriks A berukuran 4×4 difaktorkan atas L dan U,

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Di sini kita menggunakan simbol m_{ij} ketimbang l_{ij}, karena nilai l_{ij} berasal dari faktor pengali (m_{ij}) pada operasi baris elementer (OBE), yaitu $R_j - m_{ij}R_i$.
Langkah pengerjaan:

1. Nyatakan $A = IA$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Lakukan eliminasi Gauss pada matriks A menjadi matriks U. Tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di dalam matriks I.

3. Setelah seluruh proses eliminasi Gauss selesai, matriks I menjadi matriks L, dan matriks A di ruas kanan menjadi matriks U.

Contoh 3.1: Tidak Ada Pertukaran Baris

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Eliminasikan matriks A di ruas kanan sehingga menjadi matriks segitiga U.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2-(-2/4)R_1]{R_3-(1/4)R_1} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 1.25 & 6.25 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-(-1/2)R_2} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} = U$$

Tempatkan faktor pengalinya di matriks I pada tempat yang berkaitan (Sebagai contoh, jika operasi yang dilakukan adalah $R_2 - (-2/4)R_1$, maka faktor pengali diletakkan sebagai l_21 (Mengikuti urutan baris yang dioperasikan).

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}$$

Bagaimana bila terdapat operasi pertukaran baris?

Contoh 3.2: Ada Pertukaran Baris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminasikan matriks A di ruas kanan sehingga menjadi matriks segitiga U.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2-(-2)R_1]{R_3-(-1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini, terlihat bahwa calon pivot (calon dari elemen diagonal) di baris kedua bernilai 0, sehingga lakukan pertukaran dengan baris ketiga.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} R_2 \Leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-(0)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

Tempatkan faktor pengalinya di matriks I pada tempat yang berkaitan. Bila dilakukan pertukaran baris, tukarlah tempat penempatannya juga. (Sebagai contoh, jika operasi yang dilakukan adalah $R_2 \Leftrightarrow R_3$, maka tukarkan posisi m_{21} dengan m_{31}.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3.2 Metode Reduksi Crout

*Nama lain: Metode reduksi Cholesky atau Metode Dolittle.
Tinjau matriks 3×3 berikut.

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Karena $LU = A$, hasil perkalian L dan U dapat ditulis sebagai,

$$LU = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{13} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3.3 Aplikasi Dekomposisi LU: Penyelesaian SPL $Ax = b$

- Misalkan kita mempunyai SPL $Ax = b$.
- Setelah A difaktorkan menjadi $A = LU$, maka,

$$LUx = b$$

- Misalkan,

$$Ux = y$$

maka,

$$Ly = b$$

Contoh 3.3: Penyelesaian SPL Dengan Dekomposisi LU

Misalkan SPL $Ax = b$ adalah,

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks A sudah difaktorkan menjadi L dan U pada contoh 3.1,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}$$

Solusi dapat diselesaikan dengan bertahap sebagai berikut:

- $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Diperoleh:

  - $y_1 = 2$
  - $y_2 = 2$
  - $y_3 = 0.5$

- $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

  Diperoleh:

  - $x_3 = 0.0588$
  - $x_2 = -0.6941$
  - $x_1 = 1.0353$

3.4 Determinan $A = LU$

3.4.1 Jika Tidak Ada Pertukaran Baris

Gunakan prinsip determinan untuk matriks segitiga atas dan bawah, maka,

$$\begin{aligned} det(A) &= det(LU) \\ &= det(L) \times det(U) \\ &= 1 \times det(U) \\ &= det(U) \\ &= u_{11}u_{22}\cdots u_{nn} \end{aligned}$$

3.4.2 Jika Ada Pertukaran Baris

Pertukaran baris dapat dipandang sebagai transformasi matriks A menjadi matriks A' dengan cara permutasi baris-baris matriks (sama dengan mengalikan A dengan matriks permutasi P),

$$A' = PA \iff A = P^{-1}A'$$

Dekomposisikan A',

$$A' = LU$$

Hubungkan kedua persamaan, maka,

$$A = P^{-1}LU$$

Determinan dapat dituliskan sebagai,

$$\begin{aligned} det(A) &= det(P^{-1}) \times det(LU) \\ &= det(P^{-1}) \times det(L) \times det(U) \\ &= det(P^{-1}) \times 1 \times det(U) \\ &= det(P^{-1}) \times det(U) \\ &= \alpha u_{11}u_{22}\cdots u_{nn} \end{aligned}$$

yang dalam hal ini $\alpha = det(P^{-1}) = -1$ atau 1 bergantung pada banyak pertukaran baris.
Jika terjadi pertukaran baris sebanyak p kali, α dapat ditulis sebagai,

$$\alpha = (-1)^p$$

Sehingga α bernilai 1 untuk p genap dan -1 untuk p ganjil.

$$\therefore (-1)^p u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$$

Chapter 4

Dekomposisi QR

Definisi 4.1: Dekomposisi QR

Jika matriks A berukuran $m \times n$, maka ia dapat difaktorkan (di-dekomposisi) menjadi matriks ortonormal Q $m \times n$ dan matriks segitiga atas R berukuran $n \times n$:

$$A = QR$$

Jika A matriks non-singular, maka dekomposisi A menghasilkan Q dan R yang unik.

4.1 Metode Gram-Schimdt

Merupakan salah satu metode penyelesaian dekomposisi QR.

- Tinjau matriks A berukuran $m \times n$. Setiap kolom pada matriks A dipandang sebagai vektor-vektor:
$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$
- Hitung u_1, u_2, $\cdots$, u_{k+1} dan e_1, e_2, $\cdots$, e_{k+1} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1, & e_1 &= \hat{u_1} \\ u_2 &= a_2 - (a_2 \cdot e_1)e_1, & e_2 &= \hat{u_2} \\ &\vdots \\ u_{k+1} &= a_{k+1} - (a_{k+1} \cdot e_1)e_1 - \cdots - (a_{k+1} \cdot e_k)e_k, & e_{k+1} &= \hat{u_{k+1}} \end{aligned}$$

- Maka, hasil faktorisasinya:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \cdot a_1 & e_1 \cdot a_2 & \cdots & e_1 \cdot a_n \\ 0 & e_2 \cdot a_2 & \cdots & e_2 \cdot a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_n \cdot a_n \end{bmatrix} = QR$$

  dengan a_i adalah vektor kolom dari kolom-kolom matriks A dan dengan e_i adalah vektor kolom dari kolom-kolom matriks Q.

Contoh 4.1: Contoh Dekomposisi QR

Dekomposisikan matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ dengan QR!

Jawab: Karena kolom dari A adalah 3, maka solusi akan berbentuk seperti berikut,

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_n \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \cdot a_1 & e_1 \cdot a_2 & e_1 \cdot a_3 \\ 0 & e_2 \cdot a_2 & e_2 \cdot a_3 \\ 0 & 0 & e_3 \cdot a_3 \end{bmatrix} = QR$$

$$u_1 = a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad e_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = a_2 - (a_2 \cdot e_1)e_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = a_3 - (a_3 \cdot e_1)e_1 - (a_3 \cdot e_2)e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, hitunglah elemen dari matriks R,

- $a_1 \cdot e_1 = 2$
- $a_2 \cdot e_1 = 4$
- $a_3 \cdot e_1 = 2$
- $a_2 \cdot e_2 = 2$
- $a_3 \cdot e_2 = 8$

- $a_3 \cdot e_3 = 4$

Hasil akhir:

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4.2 Metode Lain

Perhatikan bahwa,

$$A = QR$$

Kalikan kedua ruas dengan Q^T,

$$\begin{aligned} Q^T A &= Q^T Q R \\ &= IR \text{ (Karena } Q^T Q = I) \\ &= R \\ \therefore R &= Q^T A \end{aligned}$$

Contoh 4.2: Contoh Lanjutan

Telah diperoleh, pada sebelumnya,

$$Q = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4.3 Determinan

Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$. Maka, Q dan R berukuran $n \times n$. Karena Q ortonormal dan R adalah matriks segitiga atas,

$$det(Q) = \pm 1, \; det(R) = \prod_{i=1}^{n} r_{i,i}$$

Karena $det(AB) = det(A)det(B)$,

$$|det(A)| = |det(QR)| = |det(Q)det(R)| = |det(Q)||det(R)| = \left|\prod_{i=1}^{n} r_{i,i}\right|$$

4.4 SPL Dengan Dekomposisi QR

Perhatikan bahwa,

$$Ax = b$$

Ganti A dengan QR,

$$QRx = b$$

Kalikan kedua ruas dengan Q^T,

$$\begin{aligned} Q^T QRx &= Q^T b \\ IRx &= Q^T b \text{ (Karena } Q^T Q = I) \\ \therefore Rx &= Q^T b \end{aligned}$$

Solusi dapat dicari dengan penyulihan mundur.

Contoh 4.3: SPL Dengan QR

Selesaikan model $Ax = b$, dimana $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Jawab: Lakukan dekomposisi QR.

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, e_1 = \hat{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ u_2 &= a_2 - (a_1 \cdot e_1)e_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, e_2 = \hat{u_2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \therefore Q &= \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lalu,

$$\begin{aligned} R_{11} &= e_1 \cdot a_1 = \sqrt{2} \\ R_{12} &= e_1 \cdot a_2 = \sqrt{2} \\ R_{22} &= e_2 \cdot a_2 = 4\sqrt{2} \\ \therefore R &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 4\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Karena $Rx = Q^T b$ dan $Q^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 4\sqrt{2} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 4\sqrt{2} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Selesaikan $\left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 4\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{array}\right]$, maka dengan substitusi mundur, diperoleh,

$$x = \begin{bmatrix} 1/8 \\ -5/8 \end{bmatrix}$$

Chapter 5

Aljabar Kompleks

Definisi 5.1: Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks berbentuk,

$$z = a + bi$$

Dengan $i = \sqrt{-1}$, a adalah komponen real, b adalah komponen imajiner.

Jika $a \neq 0$ dan $b = 0$, dinamakan bil. real. Kemudian, jika $a = 0$ dan $b \neq 0$, dinamakan bil. imajiner.

Setiap bilangan kompleks z memiliki konjugasi $\bar{z}$,

$$\bar{z} = a - bi$$

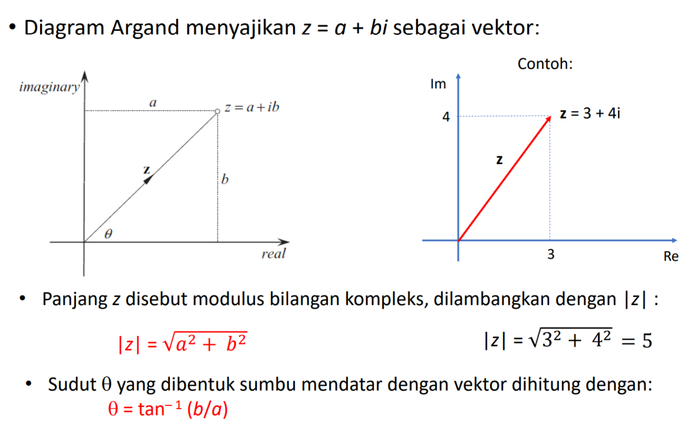

Figure 5.1: Ilustrasi Bilangan Kompleks Dengan Diagram Argand

Sudut yang dibentuk sumbu mendatar dengan vektor adalah θ.

- Untuk kuadran 1 dan 4, $a > 0$, maka:

$$\theta = \tan^{-1}(b/a)$$

- Untuk kuadran 2 dan 2, $a < 0$, maka:

$$\theta = 180^0 \tan^{-1}(b/a)$$

- $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \implies a = |z|\cos(\theta)$
- $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|} \implies b = |z|\sin(\theta)$

Jadi,

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

5.1 Operasi Dasar

Definisi 5.2: Operasi Dasar Bilangan Kompleks

- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
- $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 - a_2 b_1)i$
- $z\bar{z} = |z|^2$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a^2 + b^2} + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a^2 + b^2} i$

Perkalian bilangan kompleks dengan konjugasi/sekawan kompleks lain: Misalkan terdapat $z_1 = a_1 + ib_1$ dan $z_2 = a_2 + ib_2$, yang artinya $\bar{z_2} = a_2 - ib_1$, maka

$$z_1 \bar{z_2} = (a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

Perhatikan bahwa komponen realnya merupakan dot product dari z_1 dan z_2, sedangkan imajinernya merupakan hasil determinan dari matriks $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}$.

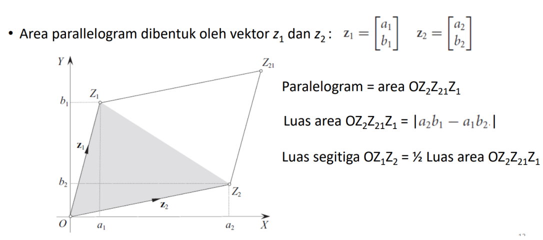

Figure 5.2: Ilustrasi

Artinya, besar komponen imajiner $z_1 \bar{z_2}$ adalah 1/2 komponen realnya.

5.2 Aksioma Bilangan Kompleks

Diberikan $z_1, z_2, z_3 \in C$, maka berlaku:

1. Klosur
   Untuk semua z_1 dan z_2, berlaku penjumlahan ($z_1 + z_2 \in C$) dan perkalian ($z_1 z_2 \in C$).

2. Identitas
   Untuk setiap z, ada elemen identitas 0 dan 1, sehingga:

   - Penjumlahan: $z + 0 = 0 + z = z$.
   - Perkalian: $z(1) = (1)z = z$.

3. Invers/Balikan
   Untuk setiap z, ada elemen balikan $-z$ dan $1/z$, sehingga:

   - Penjumlahan: $z + (-z) = (-z) + z = 0$.
   - Perkalian: $z(\frac{1}{z}) = (\frac{1}{z})z = 1(z \neq 0)$.

4. Asosiasi
   Untuk semua z_1, z_2, dan z_3,

   - Penjumlahan: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
   - Perkalian: $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z3$.

5. Komutatif
   Untuk semua z_1 dan z_2,

   - Penjumlahan: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
   - Perkalian: $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

6. Distributif
   Untuk semua z_1, z_2, dan z_3,

   - $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.
   - $(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z3$.

5.3 Fungsi i Sebagai Rotor

i berperan sebagai "rotor". Di sini, suatu bilangan kompleks akan berputar sejauh $\frac{\pi}{4}$ rad bila dikalikan dengan i. Sehingga setelah dikalikan 4 kali, akan kembali lagi ke angka awal.

Apa yang akan dihasilkan bila dikalikan dengan $-i$?

Bila dikalikan dengan $-i$, putaran akan bergerak sejauh $-\frac{\pi}{4}$ rad.

Perhatikan gambar berikut untuk lebih jelasnya. Setiap garis serta arah panah melambangkan posisi garis tersebut saat akan dikalikan oleh i.

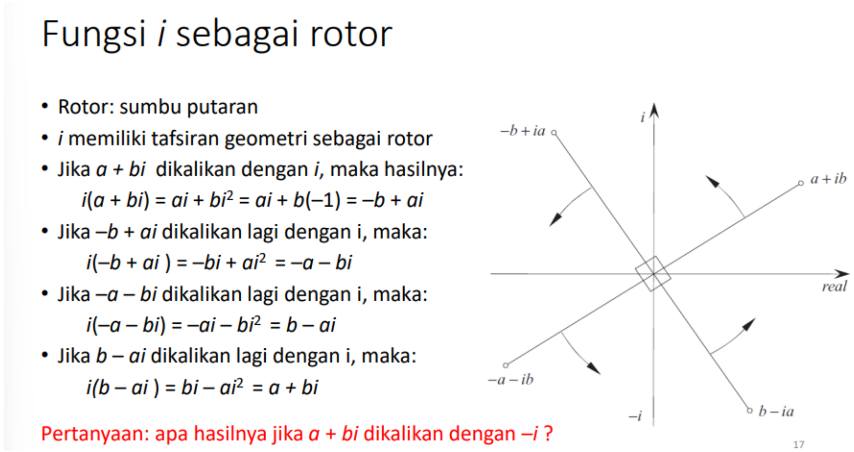

Figure 5.3: i sebagai rotor.

5.4 Persamaan Euler

Akan diturunkan bilangan euler e dengan bilangan kompleks. Bilangan e didefinisikan dengan,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Atau,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

Dengan deret MacLaurin, e^x dinyatakan dalam bentuk,

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

Sehingga, e^{ix} dinyatakan dalam bentuk,

$$e^{ix} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ix}{1!}+\frac{i^2x^2}{2!}+\cdots+\frac{1^nx^n}{n!}\right)$$

$$e^{ix} = 1+\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\cdots$$

Kumpulkan bilangan riil dengan imajiner,

$$e^{ix} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)$$

Ingat bahwa definisi sin dan cos dapat ditulis,

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

Maka,

Teorema 5.1: Euler's Formula

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

Dapat ditulis juga,

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

Teorema 5.2: Euler's Identity

Memanfaatkan $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, dengan $x = \pi$, didapatkan,

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$e^{i\pi} = -1 \implies e^{i\pi} + 1 = 0$$

Persamaan akhir ini dinamakan Euler's Identity.

Dengan mengalikan bilangan kompleks z dengan $e^{i\pi}$,

$$\begin{aligned} z' &= ze^{i\pi} = z(-1) \\ &= -(a + bi) = -a - bi \end{aligned}$$

yang diinterpretasikan sebagai memutar vektor z sejauh 180^0.
Pun mengalikan bilangan kompleks z dengan $e^{i\frac{\pi}{2}}$,

$$\begin{aligned} z' &= ze^{i\frac{\pi}{2}} = z(i) \\ &= (a + bi)i = -b + ai \end{aligned}$$

yang diinterpretasikan sebagai memutar vektor z sejauh 90^0.
Dapat disimpulkan bahwa $e^{i\phi}$ adalah sebuah rotor yang memutar z menjadi z' sejauh ϕ, berlawanan arah jarum jam.

$$z' = ze^{e\phi}$$

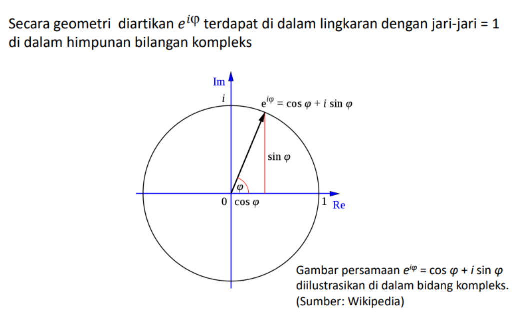

Figure 5.4: Ilustrasi pemutaran.

Contoh 5.1: Pemutaran

Tentukan bayangan bilangan kompleks $z = 3 - 4i$ jika diputar sejauh 90 derajat berlawanan arah jarum jam.

$$\begin{aligned} z' = ze^{e\phi} &= ze^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= z(i) \\ &= (3-4i)i \\ &= 4+3i \end{aligned}$$

Contoh 5.2: Polar dan Eksponen

Nyatakan $z = \sqrt{3} + i$ dalam bentuk polar dan eksponen.

Jawab: Kita dapatkan $r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} = 2$. Diperoleh $\tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Karena z di kuadran pertama (koefisien real dan imajiner bernilai positif), pilih $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Didapat bentuk polar $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.
Beserta bentuk eksponen $z = 2e^{i(\pi/6)}$

5.5 Vektor Di Ruang Kompleks

- Ruang vektor yang elemen-elemennya berbentuk bilangan kompleks dinamakan ruang vektor kompleks.
- Ruang vektor kompleks berorder-n dilambangkan dengan C^n.
- Setiap vektor di dalam C^n memiliki n-komponen, yaitu $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$, dalam hal ini $v_1, v_2, \cdots, v_n$ adalah bilangan kompleks:

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \cdots, a_n + ib_n)$$

- Contoh vektor di C^3:

$$u = (1+i, -4i, 3+2i),\ v = (0, i, 5),\ w = \left(6 - \sqrt{2}i,\ 9 + \frac{1}{2}i, \pi i\right)$$

- Setiap vektor di C^n dapat dipecah menjadi bagian real dan imajiner,

$$v = (a_1, a_2, \cdots, a_n) + i(b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

atau dapat dinyatakan,

$$v = Re(v) + i(Im(v))$$

- Sekawan/Conjugatenya,

$$\bar{v} = (\bar{v_1}, \bar{v_2}, \cdots, \bar{v_n} = (a_1 - ib_1, a_2 - ib_2, \cdots, a_n - ib_n)$$

Teorema 5.3: Teorema Vektor Di Ruang Kompleks

Jika u dan v adalah vektor di C^n, dan jika k suatu skalar, maka,

- $\bar{\bar{u}} = u$
- $\overline{ku} = \bar{k}\bar{u}$
- $\overline{u+v} = \bar{u} + \bar{v}$
- $\overline{u-v} = \bar{u} - \bar{v}$

Teorema 5.4: Matriks Kompleks

Jika A adalah matriks $m \times k$ dan B B adalah matriks $k \times n$, maka,

- $\overline{\bar{A}} = A$
- $\overline{A^T} = (\bar{A})^T$
- $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$

5.5.1 Perkalian Dot Kompleks

Definisi 5.3: Perkalian Dot Kompleks

Jika $u = (u_1, u_2, \cdots u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, \cdots v_n)$ adalah vektor di ruang kompleks, maka perkalian dotnya didefinisikan sebagai,

$$u \cdot v = u_1\bar{v_1} + u_2\bar{v_2} + + \cdots + u_n\bar{v_n}$$

Beberapa atribut yang berkaitan dengan perkalian dot sebelumnya tetap berlaku.

- u dan v ortogonal jika $u \cdot v = 0$
- $||v|| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2}$
- Vektor satuan, bila $||v|| = 1$.

Teorema 5.5: Perkalian Dot Vektor Kompleks

Jika u, v, dan w adalah vektor di C^n, dan jika k skalar, maka,

- $u \cdot v = \overline{v \cdot u}$
- $u \cdot (v + w) = (u \cdot v + u \cdot w)$
- $k(u \cdot v) = (ku) \cdot v$
- $u \cdot kv = \bar{k}(u \cdot v)$

- $v \cdot v \geq 0$ & $v \cdot v = 0 \iff v = 0$

5.5.2 Eigenvalue dan Eigenvector Kompleks

Teorema 5.6: Eigenvector dan Eigenvalue Kompleks

Jika λ adalah eigenvalue dari matriks real $n \times n$ matriks A, dan jika x adalah eigenvector yang berkorespondensi, maka $\bar{\lambda}$ adalah eigenvalue juga untuk A, dan $\bar{x}$ adalah eigenvectornya.

Contoh 5.3: Pencarian Eigenvalue dan Eigenvector

Tentukan nilai eigen dan basis ruang eigen dari $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab: Persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

Nilai eigennya adalah $\lambda = i$ dan $\lambda = -i$.

Hitung vektor eigen: $\begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \left[\begin{array}{cc|c} \lambda + 2 & 1 & 0 \\ -5 & \lambda - 2 & 0 \end{array}\right]$

Lakukan Gauss-Jordan untuk $\lambda = i$,

$$\left[\begin{array}{cc|c} i + 2 & 1 & 0 \\ -5 & i - 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - (i-2)R_1} \left[\begin{array}{cc|c} i + 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(R_1(i-2))/-5} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2/5 - i/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ditemukan solusi $x_1 + (2/5 - i/5)x_2 = 0$. Misalkan $x_2 = t$, maka $x_1 = -(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i)t$. Basis ruang eigennya adalah $x = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dengan cara yang sama untuk $\lambda = -i$ (tidak perlu dihitung, lihat teorema di atas), basis ruang eigennya adalah, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}$

Teorema 5.7: Matriks dan Persamaan Karakteristik

Misalkan A adalah matriks real 2×2, maka persamaan karakteristik A adalah $\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0$ dan,

- A punya dua real eigenvalues jika $tr(A)^2 - 4det(A) > 0$,
- A punya satu real eigenvalue kembar jika $tr(A)^2 - 4det(A) = 0$, dan
- A punya dua kompleks eigenvalue konjugasi jika $tr(A)^2 - 4det(A) < 0$, dan

Contoh 5.4: Penerapan Teorema

Gunakan persamaan di atas untuk menentukan eigenvalue dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.
Jawab: Kita punya $tr(A) = 7$ dan $det(A) = 12$, maka persamaan karakteristiknya

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \implies (\lambda - 4)(\lambda - 3) = 0$$

Maka eigenvalue dari A adalah $\lambda = 4$ dan $\lambda = 3$.

Chapter 6

Aljabar Quarternion

Figure 6.1: Brougham Bridge

BTW, ini cerita asal mulanya menarik. Coba baca di sini.

Definisi 6.1: Bilangan Quarternion

Bilangan Quarternion merupakan perluasan bilangan kompleks dari R^2 ke R^4. Setiap quarternion dapat ditulis sebagai,

$$q = a + bi + cj + dk$$

Keempat basis $\{1, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ membentuk ruang vektor 4 dimensi di atas R^4.

Mari lakukan operasi dua bilangan quarternion. Misalkan:

$$z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$$

Maka,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) \\ + i(a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 d_2) \\ + j(a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2) \\ + k(a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) \end{aligned}$$

Misalkan $v_1 = b_1 i + c_1 j + d_1 k$ dan $v_2 = b_2 i + c_2 j + d_2 k$, maka $z_1 = a_1 + v_1$ dan $z_2 = a_2 + v_2$. Perhatikan bahwa,

- $b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 = v_1 \cdot v_2$
- $i(c_1 d_2 - d_1 d_2) + j(d_1 b_2 - b_1 d_2) + k(b_1 c_2 - c_1 b_2) = v_1 \times v_2$
- $a_1(ib_2 + jc_2 + kd_2) + a_2(ib_1 + jc_1 + kd_1) = a_1 v_2 + a_2 v_1$

Sehingga,

$$z_1 z_2 = (a_1 + v_1)(a_2 + v_2) = a_1 a_2 - v_1 \cdot v_2 + a_1 v_2 + a_2 v_1 + v_1 \times v_2$$

6.1 Operasi Dasar

Definisi 6.2: Ringkasan

1. Bilangan quarternion adalah gabungan skalar dengan vektor, berbentuk
$$[q = a + v = a + bi + cj + dk = (a, v)$$
2. $ijkk, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$
3. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
4. Perkalian dua quarternion menghasilkan,
$$z_1 z_2 = (a_1 + v_1)(a_2 + v_2) = a_1 a_2 - v_1 \cdot v_2 + a_1 v_2 + a_2 v_1 + v_1 \times v_2$$
5. Dalam aljabar vektor, i, j, k diubdah ke vektor satuan $\hat{i}, \hat{j}$, dan $\hat{k}$.
6. Norm dari quarternion,
$$||q|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$
7. Quarternion satuan diperoleh dengan
$$\hat{q} = \frac{1}{||q||}(a + bi + cj + dk)$$
8. Dinamakan ”pure quarternion” bila $a = 0$, atau $q = bi + cj + dk$. Perkalian dua pure quarternion menghasilkan impure quarternion.
9. Quarternion $q = a + v$ mempunyai konjugat $q = a - v$
10. Balikan dari quarternion q adalah $q^{-1} = \frac{1}{q} = \frac{\bar{q}}{||q||^2}$

6.2 Aksioma Bilangan Quarternion

Diberikan $q, q_1, q_2, q_3, \in C$, maka berlaku:

1. Klosur
   Untuk semua q_1 dan q_2, berlaku penjumlahan ($q_1 + q_2 \in C$) dan perkalian ($q_1 q_2 \in C$).

2. Identitas
   Untuk setiap q, ada elemen identitas 0 dan 1, sehingga:

   - Penjumlahan: $q + 0 = 0 + q = q$.
   - Perkalian: $q(1) = (1)q = q$.

3. Invers/Balikan
   Untuk setiap q, ada elemen balikan $-q$ dan q^{-1}, sehingga:

   - Penjumlahan: $q + (-q) = (-q) + q = 0$.
   - Perkalian: $q(\frac{1}{q}) = (\frac{1}{q})q = 1(q \neq 0)$.

4. Asosiasi
   Untuk semua q_1, q_2, dan q_3,

   - Penjumlahan: $q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3$.
   - Perkalian: $q_1(q_2 q_3) = (q_1 q_2) q_3$.

5. Komutatif
   Untuk semua q_1 dan q_2,

   - Penjumlahan: $q_1 + q_2 = q_2 + q_1$.
   - Perkalian: $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$.

6. Distributif
   Untuk semua q_1, q_2, dan q_3,

   - $q_1(q_2 + q_3) = q_1 q_2 + q_1 q_3$.
   - $(q_1 + q_2) q_3 = q_1 q_3 + q_2 q 3$.

6.3 Rotasi Vektor Dengan Quarternion

- Misalkan p adalah sebuah vektor di $\mathbb{R}^3$
- Vektor p diputar sejauh θ berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu u, bayangannya adalah p' yang dihitung dengan persamaan,

  $$p' = qpq^{-1}$$

  Dalam hal ini,

  - $p = xi + yj + zk$
  - $q = \cos\theta/2 + \sin\theta/2\hat{u}$
  - $q^{-1} = \cos\theta/2 - \sin\theta/2\hat{u}$

Contoh 6.1: Rotasi $u = j$

Misalkan sebuah titik $P(0, 1, 1)$ atau vektor $p = (0, 1, 1)$ diputar sejaugh $\theta = 90^0$ dengan sumbu rotasi $u = j$. Di manakah vektor bayangannya?

- $u = j \implies \hat{u} = j$ (Karena panjangnya sudah satu)
- $p = 0 + 0i + j + k$
- $q = \cos 45^0 + \sin 45^0 \hat{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1 + 0i + j + k)$
- $q = \cos 45^0 - \sin 45^0 \hat{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1 - 0i - j - k)$

Bayangan vektor p adalah,

$$\begin{aligned}
p' &= qpq^{-1} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1 + 0i + j + k)\,(0 + 0i + j + k)\frac{\sqrt{2}}{2}\,(1 - 0i - j - k) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + j + k)\frac{\sqrt{2}}{2}\,(1 - 0i - j - k) \\
&= \frac{1}{2}(-1 + 0i + j + k)(1 - 0i - j - k) \\
&= \frac{1}{2}(0 + 2i + 2j + 2k) \\
\therefore p' &= i + j = (1, 1, 0)
\end{aligned}$$